CHAPTER 10

GAME THEORY
ทฤษฎีเกมส์

1

CHAPTER 14 GAME THEORY

- **Two-person, Zero- sum game**

  มีผู้เล่นสองฝ่าย เช่น armies, teams, firms etc.

  มีฝ่ายหนึ่งแพ้ (-) ฝ่ายหนึ่งชนะ (+) ฉะนั้น **ผลรวมของค่าเกมส์ = 0**

  (Net winning = 0)

Two-person game is characterized by

1. Strategy of player 1
2. Strategy of player 2
3. The payoff table

2

GAME THEORY

Strategy for each player ตัวอย่างการหาเสียงของนักการเมืองสองฝ่าย

Strategy 1 = spend one day in each city

Strategy 2 = spend both day in Bigtown

Strategy 3 = spend both day in Megalpolis

Payoff Table สำหรับนักการเมืองคนที่ 1 ในการหาเสียง

Strategy		Total Net vote won by Politician 1 (in unit of 1,000 votes)		
		Politician 2		
		1	2	3
Politician 1	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	-1

GAME THEORY

Payoff Table สำหรับ*นักการเมืองคนที่ 1* ในการหาเสียง

Strategy		Total Net vote won by Politician 1 (in unit of 1,000 votes)		
		Politician 2		
		1	2	3
Politician 1	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	-1

Payoff Table สำหรับ*นักการเมืองคนที่ 2* ในการหาเสียง

Strategy		Total Net vote won by Politician 1 (in unit of 1,000 votes)		
		Politician 2		
		1	2	3
Politician 1	1	-1	-2	-4
	2	-1	0	-5
	3	0	-1	+1

การหาผลลัพธ์ของเกม ที่ผลรวมเป็น 0
VARIATION 1 OF THE EXAMPLE

ใน case นี้ จะใช้ **Dominated strategy** ซึ่งเป็นวิธีที่จะช่วยลดขนาดของตาราง ผลตอบแทน โดยทำการตัดกลยุทธ์ที่เป็นไปไม่ได้ออกไป จนกระทั่งเหลือเพียงทางเลือกเดียว

		Total Net vote won by Politician 1 (in unit of 1,000 votes)		
		Politician 2		
Strategy		1	2	3
	1	1	2	4
Politician 1	2	1	0	5
	3	0	1	-1

1.ตัด strategy 3 ของ player 1 ออก

1	**2**	**4**
1	**0**	**5**

2.ตัด strategy 3 ของ player 2 ออก

1	**2**	
1	**0**	

การหาผลลัพธ์ของเกม ที่ผลรวมเป็น 0
DOMINATED STRATEGY

1.ตัด strategy 2 ของ player 1 ออก

1	**2**	
1	**0**	

1	**2**	

Strategy 2 for player 2 is now dominated by strategy 1 (1<2) ดังนั้น strategy 2 จึงถูกกำจัดโดย player 2

ในเกมนี้ ผู้เล่นทั้งสองจะเลือก strategy 1, politician 1 จะได้รับผลโหวตมากกว่า politician 2 เท่ากับ 1000 votes

ในปัญหานี้ Value of game = 1

ถ้า Value of game = 0 จะเรียกว่าเป็น Fair Game

การหาผลลัพธ์ของเกม ที่ผลรวมเป็น 0
VARIATION 2 OF THE EXAMPLE

ในกรณีที่ไม่สามารถแก้ปัญหาโดย Dominated strategy ได้ เราอาจเลือกใช้วิธีการดังต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า **ยุทธวิธีเดียว (pure strategy)**

Strategy		Politician 2			
		1	2	3	Minimum
	1	-3	-2	6	-3
Player 1	2	2	0	2	0
	3	5	-2	-4	4
Maximum		5	0	6	

Maximin value

Minimax value

โดยทั่วไป ค่า **minimax ≥ maximin** ในกรณีนี้ **Player 1 จะใช้ maximin strategy** ส่วน **Player 2 จะใช้ minimax strategy** ในกรณีนี้ ค่าของเกม = 0 เป็น ***Fair game***

สำหรับ strategy ที่แต่ละฝ่ายเลือก เรียกว่าเป็น Equilibrium solution ตำแหน่งที่ให้ค่า maximin ในแถว และ minimax ใน column จะเรียกว่า Saddle point หรือ จุดอานม้า

การหาผลลัพธ์ของเกม
ADDITIONAL EXAMPLE

		Player B				
		1	2	3	4	Minimum
	1	8	2	9	5	2
Player A	2	6	5	7	18	5
	3	7	3	-4	10	-4
Maximum		8	5	9	18	

Maximin value

Saddle Point

Minimax value

Maximin = Minimax = 5 เกมนี้มีจุดอานม้า และค่าของเกม = 5

ทั้ง player A และ Player B เลือก strategy 2

ค่าของเกมทั่วไป จะสอดคล้องกับอสมการดังต่อไปนี้

Maximin ≤ Value of Game ≤ Minimax

การหาผลลัพธ์ของเกม
VARIATION 3 OF THE EXAMPLE

ในบางกรณี ผลตอบแทนของเกม จะไม่มี Saddle point และเมื่อเล่นเกมต่อไป จะไม่มีจุดหยุดหรือจุดที่ทั้งสองฝ่ายพอใจ ดังในกรณีนี้

Strategy		Player B 1	2	3	Minimum
Player A	1	0	-2	2	-2
	2	5	4	-3	-3
	3	2	3	-4	-4
Maximum		5	4	2	

Maximin value

Minimax value

ค่า **minimax ≠ maximin** ไม่มี **Saddle Point**

ในกรณีนี้ จัดว่าเป็น **Unstable solution** เราจะใช้ **Mixed Strategy หรือยุทธวิธีผสม** ในการแก้ปัญหานี้

Mixed Strategy จะนำทฤษฎีการแจกแจงความน่าจะเป็น **(Probability Distribution)** มาใช้

การหาผลลัพธ์ของเกม
MIXED STRATEGY FOR (2XN) AND (MX2) GAME

TABLE 14.5 Payoff table for player 1 for variation 3 of the political campaign problem

Strategy		Player 2: 1	2	3	Minimum
Player 1	1	0	−2	2	−2 ← Maximin value
	2	5	4	−3	−3
	~~3~~	~~2~~	~~3~~	~~−4~~	~~−4~~
Maximum:		5	4	2 ↑ Minimax value	

ใช้ Dominated Strategy ตัดกลยุทธ์ที่ 3 ของ player 1 ออก

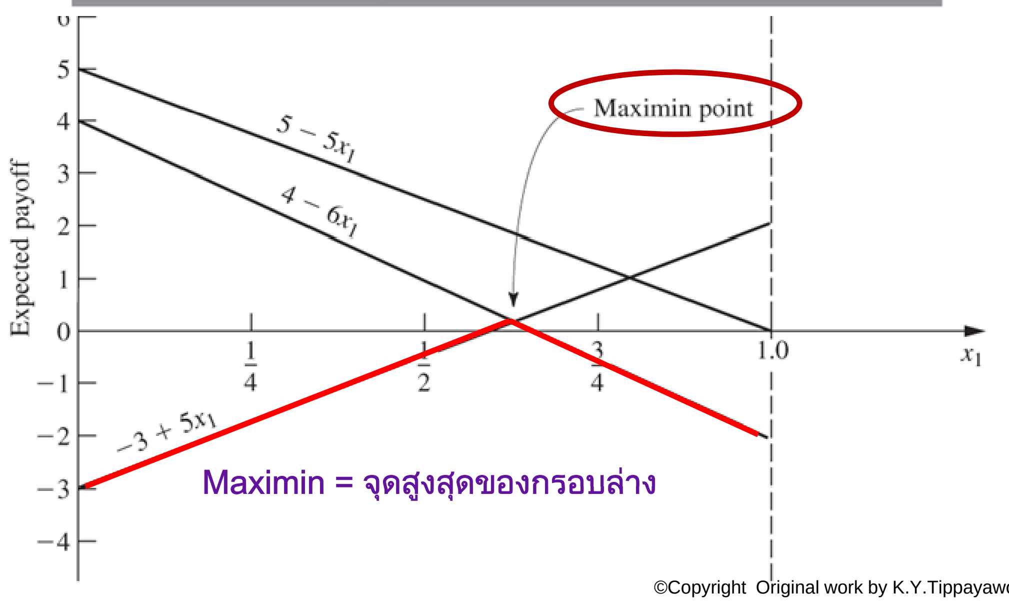
Probability		Pure Strategy	Player B 1	2	3
Player A	X_1	1	0	-2	2
	$1- X_1$	2	5	4	-3

Probability		Pure Strategy	Player B		
			1	2	3
Player A	X_1	1	0	-2	2
	$1- X_1$	2	5	4	-3

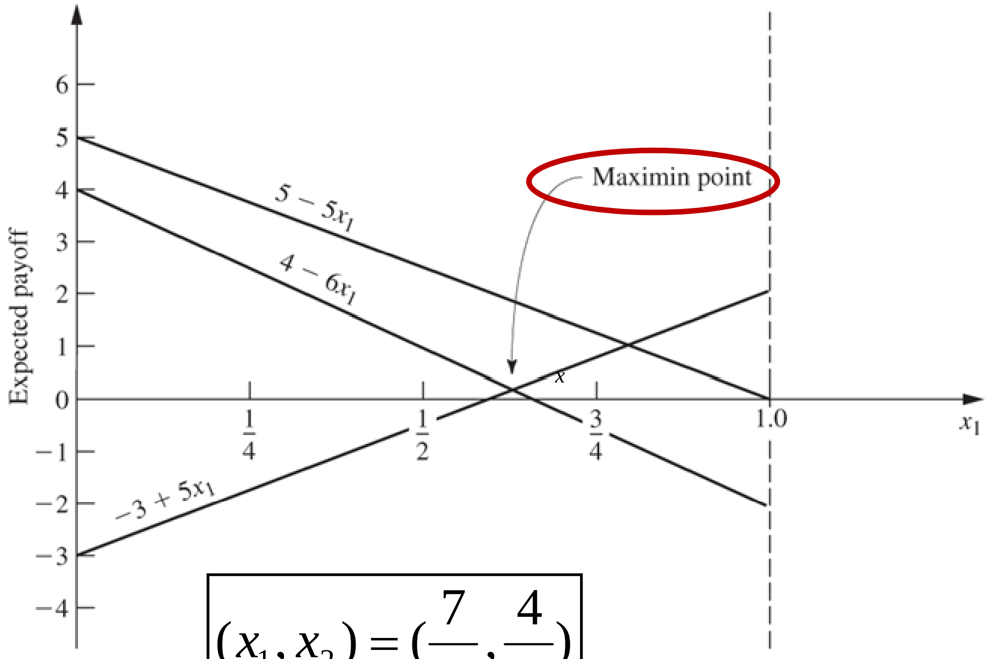
Expected payoff for Player 1

(y_1, y_2, y_3)	Expected Payoff
(1, 0, 0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
(0, 1, 0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
(0, 0, 1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$

(y_1, y_2, y_3)	Expected Payoff
(1, 0, 0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
(0, 1, 0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
(0, 0, 1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$



การหาผลลัพธ์ของเกม
MIXED STRATEGY FOR (2XN) AND (MX2) GAME

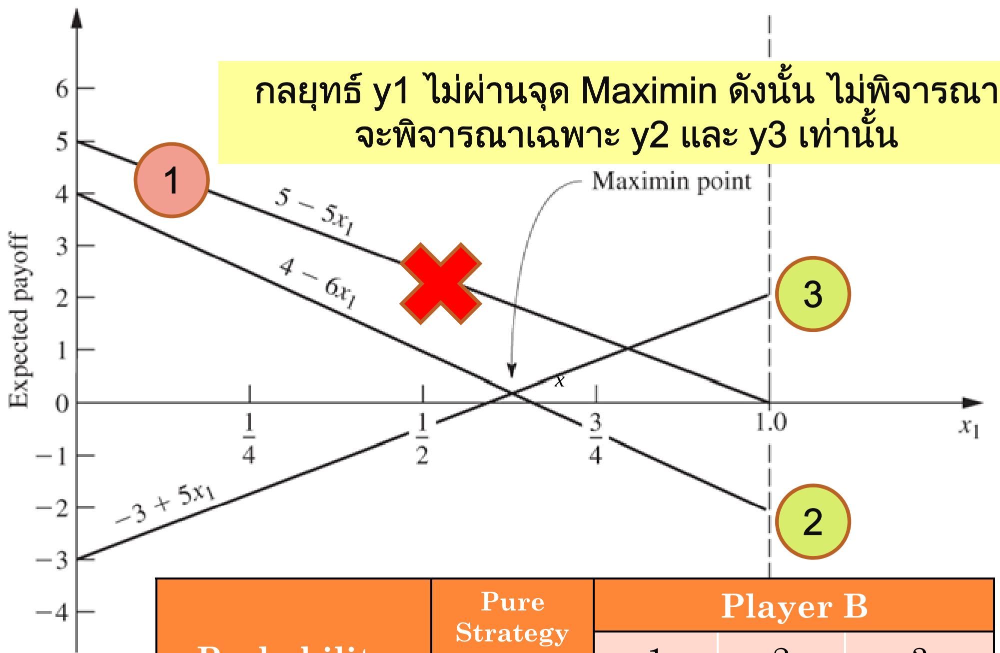


$$\boxed{(x_1, x_2) = \left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right)}$$

$$\boxed{v = value\ of\ the\ game = \frac{2}{11}}$$

การหาผลลัพธ์ของเกม
MIXED STRATEGY FOR (2XN) AND (MX2) GAME

กลยุทธ์ y1 ไม่ผ่านจุด Maximin ดังนั้น ไม่พิจารณา
จะพิจารณาเฉพาะ y2 และ y3 เท่านั้น



Probability		Pure Strategy	Player B		
			1	2	3
Player A	X_1	1	0	-2	2
	$1- X_1$	2	5	4	-3

การหาผลลัพธ์ของเกม
MIXED STRATEGY FOR (2XN) AND (MX2) GAME

Expected payoff for Player A

Probability		Pure Strategy	Player B		
			~~1~~	2	3
	X_1	1	~~0~~	-2	2
Player A	$1- X_1$	2	~~5~~	4	-3

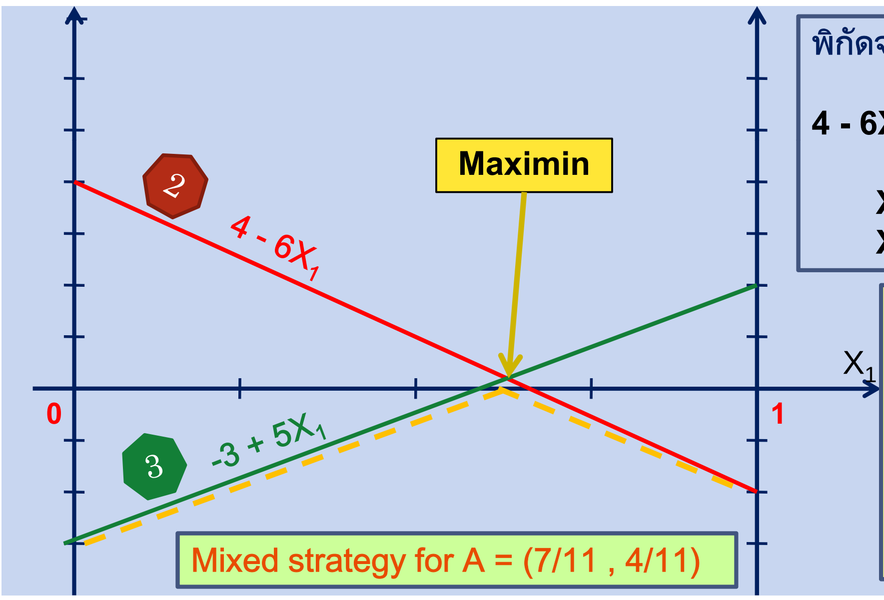
กลยุทธ์ 1 ของ Player B ถูก Dominate ด้วยกลยุทธ์ 2

Probability		Pure Strategy	Player B	
			2	3
	X_1	1	-2	2
Player A	$1- X_1$	2	4	-3

Probability		Pure Strategy	Player B	
			2	3
	X_1	1	-2	2
Player A	$1- X_1$	2	4	-3

B เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for A	($X_2 = 1- X_1$)
2	$-2 X_1 + 4 X_2$	$4 - 6X_1$
3	$2 X_1 - 3 X_2$	$-3 + 5X_1$

Expected payoff for A



พิกัดจุดตัดของเส้นสองเส้น

$$4 - 6X_1 = -3 + 5X_1$$

$$X_1 = 7/11$$
$$X_2 = 4/11$$

Expected Payoff

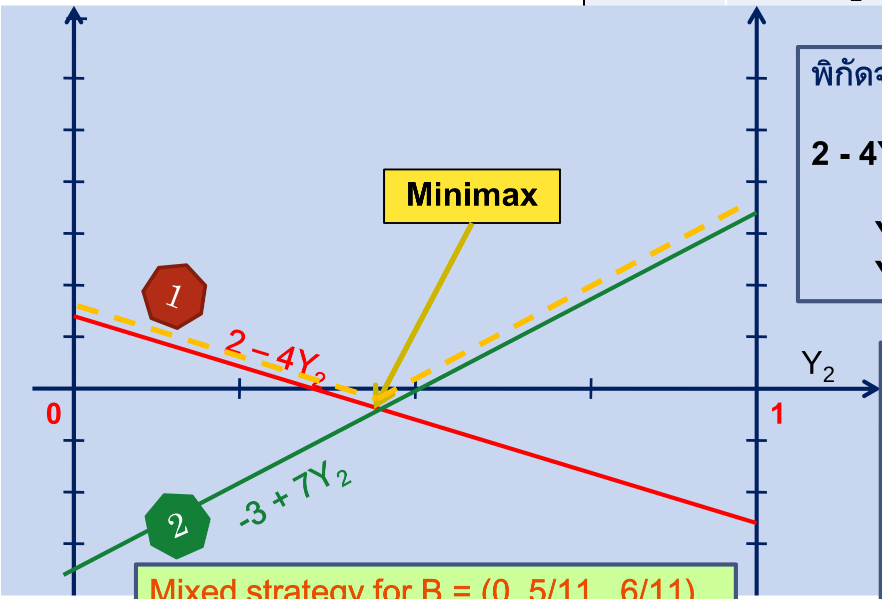
แทนค่า X_1 (7/11) ในสมการ 2 หรือ 3

$$4 - 6X_1 = 2/11$$

Expected payoff for Player B

Probability		Pure Strategy	Player A 1	Player A 2
Player B	Y_2	2	-2	4
	$1- Y_2$	3	2	-3

A เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for B	($Y_3 = 1- Y_2$)
1	$-2\ Y_2 + 2\ Y_3$	$2 - 4Y_2$
2	$4\ Y_2 - 3\ Y_3$	$-3 + 7Y_2$



พิกัดจุดตัดของเส้นสองเส้น

$$2 - 4Y_2 = -3 + 7Y_2$$

$$Y_2 = 5/11$$
$$Y_3 = 6/11$$

Expected Payoff (Value of Game, V) แทนค่า Y_2 (5/11) ในสมการ 1 หรือ /

$2 - 4Y_2 =$ 2/11

Mixed strategy for B = (0, 5/11 , 6/11)

การหาผลลัพธ์ของเกม
MIXED STRATEGY FOR (2XN) AND (MX2) GAME

Expected payoff for Player A

Probability		Pure Strategy	Player B 1	Player B 2	Player B 3
	X_1	1	0	-2	2
Player A	$1- X_1$	2	5	4	-3

Expected payoff for Player B

Probability		Pure Strategy	Player A 1	Player A 2
Player B	Y_2	2	-2	4
	$1- Y_2$	3	2	-3

$$(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$$

$$v = value\ of\ the\ game = \frac{2}{11}$$

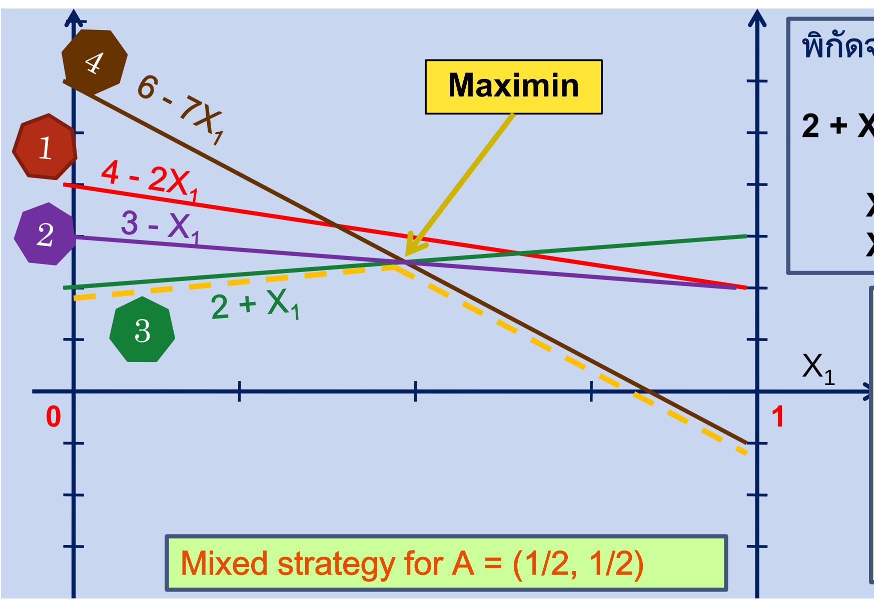
More example for (2x4) game

Probability		Pure Strategy	Player B			
			1	2	3	4
	X_1	1	2	2	3	-1
Player A	$1- X_1$	2	4	3	2	6

B เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for A	($X_2 = 1- X_1$)
1	$2 X_1 + 4 X_2$	$4 - 2X_1$
2	$2 X_1 + 3 X_2$	$3 - X_1$
3	$3 X_1 + 2 X_2$	$2 + X_1$
4	$- X_1 + 6 X_2$	$6 - 7X_1$

B เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for A	($X_2 = 1- X_1$)
1	$2 X_1 + 4 X_2$	$4 - 2X_1$
2	$2 X_1 + 3 X_2$	$3 - X_1$
3	$3 X_1 + 2 X_2$	$2 + X_1$
4	$- X_1 + 6 X_2$	$6 - 7X_1$

Expected payoff for A



พิกัดจุดตัดของเส้น 3 และ 4

$$2 + X_1 = 6 - 7X_1$$

$$X_1 = 1/2$$

$$X_2 = 1/2$$

Expected Payoff

แทนค่า X_1 (1/2) ในสมการ 3 หรือ 4

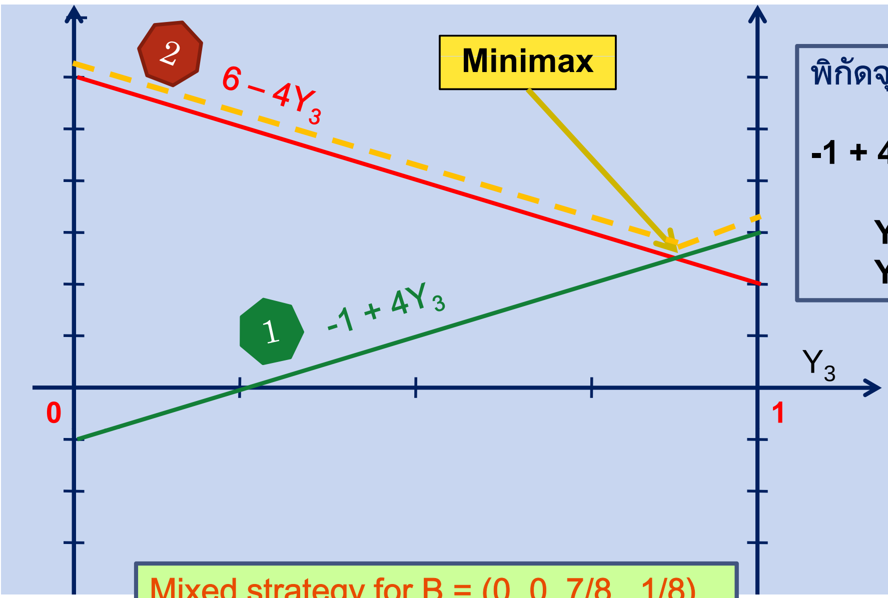
$$2 + X_1 = 5/2$$

หา Mixed strategy ของ B

- เลือกเส้นตรงที่ผ่าน Maximin (เส้นตรงที่มีความชันตรงข้ามกัน
- อาจเลือกเส้นตรง 2 &3 หรือ 3&4
- ถ้าเลือกเส้นตรง 3 และ 4 ดังนั้น

Y_1&Y_2= 0

A เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for B	($Y_3 = 1- Y_4$)
1	$3Y_3 - Y_4$	$-1 + 4Y_3$
2	$2Y_3 + 6Y_4$	$6 - 4Y_3$



พิกัดจุดตัดของเส้นสองเส้น

$-1 + 4Y_3 = 6 - 4Y_3$

$Y_3 = 7/8$

$Y_4 = 1/8$

Mixed strategy for B = (0, 0, 7/8 , 1/8)

Expected Payoff (Value of Game, V) แทนค่า Y_3 (7/8) ในสมการ 1 หรือ /

$-1 + 4Y_3 =$ 5/2

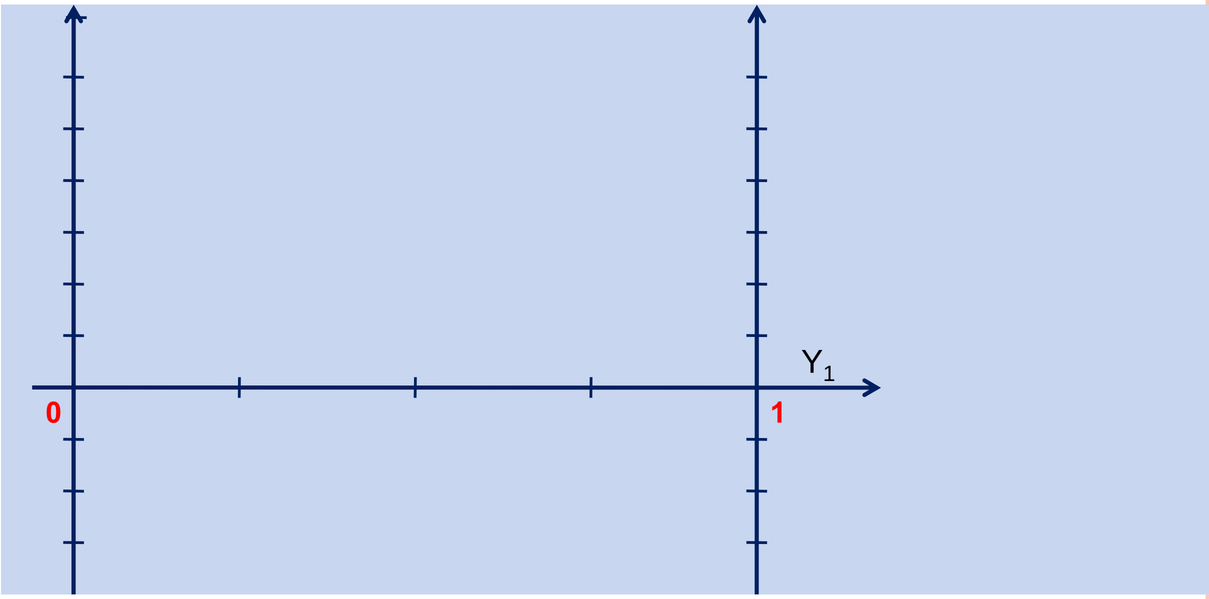
More example for (4 x 2) game

	Strategy	Player B	
		1	2
	Probability	Y_1	Y_2
Player A	1	2	4
	2	2	3
	3	3	2
	4	-2	6

A เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for B	($Y_2 = 1- Y_1$)
1		
2		
3		
4		

A เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for B
1	
2	
3	
4	

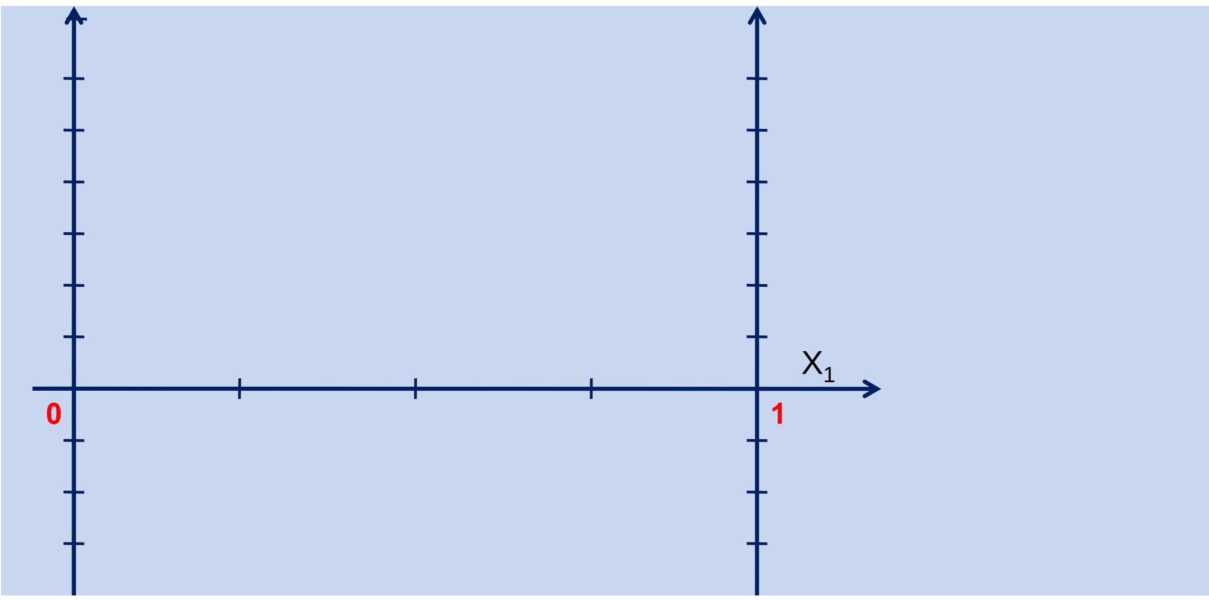
Expected payoff for B



หา Mixed strategy ของ A

- เลือกเส้นตรงที่ผ่าน Minimax (เส้นตรงที่มีความชันตรงข้ามกัน
-

B เลือกกลยุทธ์	Expected Payoff for A	
1		
2		



Payoff table for A

B

A

	1	2	3	4	5	6
1	4	2	0	2	1	1
2	4	3	1	3	2	2
3	4	3	7	-5	1	2
4	4	3	4	-1	2	2
5	4	3	3	-2	2	2